

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅
管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
园龄：4年7个月
粉丝：288
关注：5
+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动你的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

积分 - 457097
排名 - 1198

线性代数笔记13——Ax=b的通解

关于最简行阶梯矩阵和矩阵秩，可参考《[线性代数笔记7——再看行列式与矩阵](#)》

召唤一个方程Ax = b:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = b_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = b_2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 = b_3 \end{cases}$$

3个方程4个变量，方程组有无数解，现在要关注的是b₁b₂b₃之间满足什么条件时方程组有解，它的解是什么？

在这个例子中可以马上看出，b₁+b₂ = b₃，一般的方法是消元法化简：

$$\begin{aligned} [A \quad b] &= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & b_2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & b_3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

化简到这一步就可以确定主元是x₁和x₃。通过最后一行可知，b₃ - b₂ - b₁ = 0。b₁b₂b₃可以是任意数，所以只要满足b₃ - b₂ - b₁ = 0，方程组就有解。这样的组合很多，可以很容易找到一个特解：

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

现在我们知道了b中三个分量的关系，并且还知道只有当b属于A的列空间时有解。通过上一章的方法可知，列空间的基就是主元所在的列：

$$C(A) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} \right)$$

到此为止回答了第一个问题，什么样的b才能使Ax = b有解。现在需要回答另一个问题，Ax = b的所有解是什么？

可以先找出一个特解，方法是令所有自由元为0，然后解出主元：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫大人

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ 2x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_3 = \frac{3}{2} \end{cases}$$
$$\xRightarrow{\text{特解}} x_p = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

已经找到了一个特解，那么方程组的其它解，也就是通解是什么呢？
假设Ax= 0的零空间的任意向量是x_n，Ax = b有一个特解x_p，那么有：

$$Ax_p = b, \quad Ax_n = 0$$

二者相加：

$$Ax_p + Ax_n = A(x_p + x_n) = b$$

所以方程组的通解是x_n + x_p。对于方程组的某解x_p来说，x_p与零空间内任意向量之和仍为解。现在看看零空间：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 2x_4 \\ x_3 = -2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + 2x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_4$$
$$N(A) = span\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

综合特解，得到Ax = b的通解：

$$x_p + x_n = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} C_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} C_2$$

矩阵的秩和主元个数相同。如果A是一个m行n列的矩阵，其主元的个数一定小于m，并且也小于n。如果A的每一列都有主元，那么A是满秩矩阵，没有自由元，如果此时有解，则解是唯一的，就是特解，即x = x_p，此时不需要求解零空间，零空间只包含零向量。

作者：我是8位的
出处：<http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！
[扫描二维码关注公众号“我是8位的”](#)

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \sqrt{2gh}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU



随笔

分类: 线性代数

好文要顶

关注我

收藏该文



我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288

+加关注

0

推荐

0

反对

« 上一篇: 寻找“最好” (7) ——误差与近似

» 下一篇: 线性代数笔记14——行空间和左零空间

posted on 2018-09-17 14:48 我是8位的 阅读(17839) 评论(2) 编辑 收藏 举报

刷新评论 刷新页面 返回顶部

登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

FinalUI Core

12,000

800

900

9 位

WebForms升级到ASP.NET Core

fineui.com

编辑推荐:

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月8日~3月18日

最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
- 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
- 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型

- Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
- 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:

博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes